

Universidade Federal de Pernambuco

Departamento de Física

Exame Geral de Doutorado

Segundo Semestre de 2025

Mecânica Clássica

07/08/2025 - 9h00 às 12h00

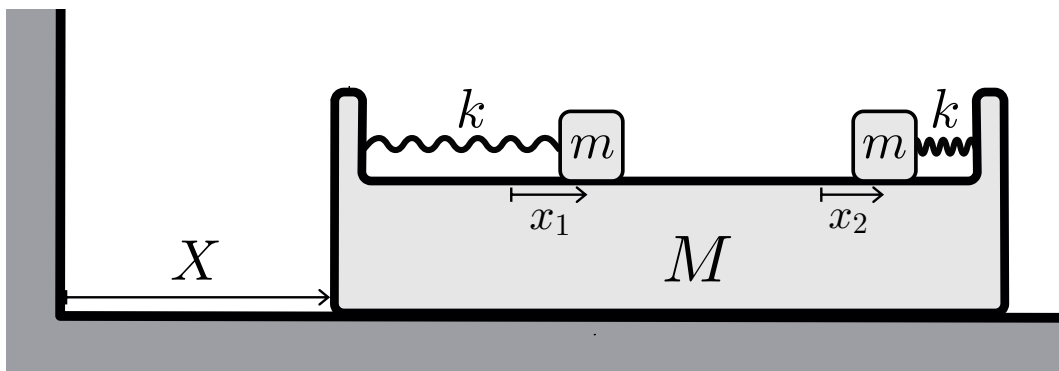
→ Escolha três dentre as quatro questões.

→ Informe apenas seu CPF (não escreva seu nome na prova).

QUESTÃO 1 – LEIS DE NEWTON, FORMALISMO LAGRANGIANO E PEQUENAS OSCILAÇÕES

Dois corpos com mesma massa m estão ligados a um bloco de massa M por molas de mesma constante elástica k , de modo a poderem oscilar livremente sobre a superfície horizontal do bloco. O bloco se encontra sobre uma superfície horizontal, na qual também pode se mover sem atrito. A figura abaixo ilustra o sistema e mostra os deslocamentos das massas, x_1 e x_2 , medidos a partir das respectivas posições de equilíbrio das molas, e também a coordenada X especificando a posição do bloco em relação a um referencial inercial.

- (a) (10%) A partir da segunda lei de Newton, escreva as equações de movimento para cada uma das massas e para o bloco.
- (b) (40%) Calcule a lagrangiana desse sistema e use as equações de Euler-Lagrange para obter as mesmas equações de movimento encontradas no item anterior.
- (c) (30%) Identifique os modos normais de oscilação desse sistema e determine as suas frequências de oscilação.
- (d) (20%) Suponha que existe atrito entre o bloco e a superfície horizontal. Se o sistema é posto em movimento numa combinação arbitrária dos modos normais, quais deles ainda permanecerão em oscilação após um longo período de tempo? Justifique.



QUESTÃO 2 – PARTÍCULA EM UM POTENCIAL CENTRAL E ANÁLISE DE ÓRBITAS

Uma partícula de massa m se move em um plano, sujeita a uma força harmônica na direção radial, de tal forma que sua lagrangiana é dada por

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) - \frac{1}{2}k r^2,$$

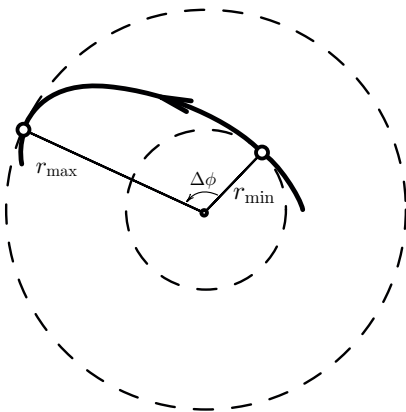
onde r e ϕ são coordenadas polares no plano e k é uma constante.

- (a) (25%) Mostre que o momento angular, $\ell = mr^2\dot{\phi}$, e a energia total, E , são constantes de movimento.
- (b) (15%) O movimento radial é análogo ao movimento unidimensional de uma partícula de massa m com posição r e energia total $E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + V(r)$. Encontre o potencial efetivo $V(r)$.
- (c) (20%) A órbita da partícula pode ser determinada por uma equação diferencial da forma $d\phi/dr = f(r)$. Encontre a função $f(r)$. (Dica: use as leis de conservação.)
- (d) (20%) Nas órbitas que não escapam para o infinito, a partícula se move entre uma distância radial mínima, r_{\min} , e uma distância radial máxima, r_{\max} . O ângulo percorrido entre pontos consecutivos com distâncias radiais máxima e mínima (ver figura) é dado por

$$\Delta\phi = \frac{\ell}{\sqrt{km}} \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{dr}{r\sqrt{(r^2 - r_{\min}^2)(r_{\max}^2 - r^2)}}.$$

Calcule r_{\min} , r_{\max} e $\Delta\phi$.

- (e) (20%) Determine se a órbita é fechada. Se for fechada, determine quantas vezes a partícula atinge a distância radial r_{\min} durante uma órbita completa.



FORMULÁRIO:

$$\int \frac{dr/r}{\sqrt{(b^2 - r^2)(r^2 - a^2)}} = -\frac{1}{ab} \arctan \left(\frac{b}{a} \sqrt{\frac{b^2 - r^2}{r^2 - a^2}} \right)$$

QUESTÃO 3 – FORMALISMO HAMILTONIANO

Considere a seguinte hamiltoniana, que descreve o movimento de uma partícula de massa m em uma dimensão, com posição x e momento canônico conjugado p ,

$$H(x,p) = \sqrt{p^2 + m^2} + Ex, \quad (1)$$

onde E é uma constante.

- (a) (30%) Obtenha as equações de Hamilton. Resolva as equações diferenciais para encontrar $p(t)$ e $x(t)$, dadas as condições iniciais $p(0) = p_0$, com p_0 uma constante, e $x(0) = 0$.
- (b) (20%) Seja $F(x, p, t)$ uma função qualquer no espaço de fase de um sistema com hamiltoniana $H(x, p)$. Mostre que, quando x e p satisfazem as equações de movimento,

$$\frac{dF}{dt} = \{F, H\} + \frac{\partial F}{\partial t}, \quad \text{onde} \quad \{F, H\} \equiv \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial H}{\partial p} - \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial p} = -\{H, F\}. \quad (2)$$

- (c) (30%) Utilize o resultado (2) para concluir que a hamiltoniana (1) é uma constante de movimento. A partir deste fato, e sabendo a solução para $p(t)$ obtida no item (a), obtenha a função horária $x(t)$ *sem integrar a equação diferencial para $\dot{x}(t)$* .
- (d) (20%) Obtenha a lagrangiana $L(x, \dot{x})$ correspondente à hamiltoniana (1).

QUESTÃO 4 – CORPO RÍGIDO E EQUAÇÕES DE EULER

Considere um corpo rígido com eixos principais de rotação ao longo das direções \hat{x}_1 , \hat{x}_2 , \hat{x}_3 e correspondentes momentos principais de inércia I_1 , I_2 e I_3 . Para um corpo rígido na ausência de forças externas, girando com velocidade angular $\vec{\omega} = \omega_1\hat{x}_1 + \omega_2\hat{x}_2 + \omega_3\hat{x}_3$ em relação aos eixos principais do corpo, responda aos itens abaixo:

- (a) (10%) Escreva a expressão para o momento angular do corpo rígido.
- (b) (40%) Para o caso do corpo simétrico com $I_1 = I_2$, mostre que o vetor velocidade angular e o vetor momento angular precessionam em torno do eixo de simetria do corpo, \hat{x}_3 , e determine a velocidade de precessão.
- (c) (50%) Mostre que, para o caso em que $I_1 < I_2 < I_3$, a rotação do corpo em torno do eixo \hat{x}_2 é instável. (*Sugestão: considere a rotação em torno de \hat{x}_2 com pequenas perturbações em torno dos outros eixos, isto é, $\vec{\omega} = \epsilon\hat{x}_1 + \omega_2\hat{x}_2 + \eta\hat{x}_3$, com $\epsilon, \eta \ll \omega_2$.)*

FORMULÁRIO:

Equações de Euler:

$$\tau_{x_1} = I_1\dot{\omega}_1 + (I_3 - I_2)\omega_2\omega_3,$$

$$\tau_{x_2} = I_2\dot{\omega}_2 + (I_1 - I_3)\omega_1\omega_3,$$

$$\tau_{x_3} = I_3\dot{\omega}_3 + (I_2 - I_1)\omega_1\omega_2.$$